HSBA

VORKURS - M A T H E M A T I K

1	Potenzrechnung
2	Distributivgesetz
3	Faktorisieren
4	Algebraische Division
5	Bruchrechnung
6	Wurzelrechnung
7	Gleichungen 1. Grades
8	Gleichungen 2. Grades
9	Gleichungen 3. Grades
10	Gleichungen 4. Grades
11	Komplexe Zahlen
12	Lineare Gleichungssysteme
13	Funktionen 1 Grades
14	Funktionen 2. Grades
15	Funktionen 3. Grades
16	Funktionen 4. Grades
17	Funktionen höheren Grades
18	Folgen und Reihen
19	Grenzwerte von Folgen
20	Differentialrechnung
21	Ableitungsregeln
22	Integralrechnung I
23	Integralrechnung II
24	Logarithmus- und Exponentialfunktionen
25	Kurvendiskussion von Exponentialfunktionen
26	Trigonometrische Funktionen
27	Formeln zur Differentiation und zur Integration

Stundenumfang: 20
Abschluss: Klausur

Literaturhinweise:

Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.
Taschenbuch der Mathematik
(herausgegeben von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler)
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1991

Dörsam, P.
Mathematik anschaulich dargestellt für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
PD, Heidenau, 2003

Lambacher – Schweizer
Analysis – Leistungskurs – Gesamtausgabe
E. Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, 1990

Opitz, O.
Mathematik
Lehrbuch für Ökonomen
Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2004

Purkert, W.:
Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler
Teubner, Stuttgart, 2001

Schöwe, R.; Knapp, J.; Borgmann, R.
Analysis
Cornelsen, Berlin, 2001

Salomon, E – Poguntke, W.
Wirtschaftsmathematik
Reihe Wirtschaft und Recht
Fortis Verlag, Köln, 2001

FORMELN

$a^n a^m$	=	a^{n+m}	$a^n b^n$	=	$(ab)^n$	$(a^n)^m$	$=a^{nm}$

BEISPIELE MIT LÖSUNGEN

$2^3\ 2^7$	=	2^{10}	$x^4 y^4$	=	$(xy)^4$	$(x^3)^4$	$=x^{12}$
$b^4 b^5$	=	b^9	$3^7 5^7$	=	15^7	$(a^5)^9$	$=a^{45}$
$3x^5\ 6x^7$	=	$18x^{12}$	$2^6\ 4^6$	=	8^6	$(a^2)^{4x}$	$=a^{8x}$
$a^4b^7a^{11}b^6a^2$	=	$a^{17} b^{13}$	$(3a)^2 (4x)^2$	=	$(12ax)^2$	$(a^{2n})^{3m}$	$=a^{6mn}$
$a^n a^{5n}$	=	a^{6n}	$(abc)^5(3abc)^5$	=	$(3a^2b^2c^2)^5$	$(x^2y^4z)^5$	$=x^{10}y^{20}z^5$
$x^{2a} x^{7a}$	=	x^{9a}	$3(ab)^2 4(xy)^2$	=	$12(abxy)^2$	$(a^4b^5c^6)^n$	$=a^{4n}b^{5n}c^{6n}$
$x^2 x^{5a}$	=	x^{2+5a}	$3^m 4^m x^m$	=	$(12x)^m$	$(4^3)^{n-1}$	$=4^{3n-3}$
$6x^7\ 5x^{3+2a}$	=	$30x^{10+2a}$	$a^x\ 9b^x\ 4c^x$	=	$36(abc)^x$	$(x^n)^m$	$=x^{nm}$
$7x^{4+2n} 3x^{11+9n}$	=	$21x^{15+11n}$	$2a^p\ 7b^p$	=	$14(ab)^p$	$(x^a)^{3n-1}$	$=x^{3an-a}$
$4a^3\ 5b^2\ 6c^4$	=	$120a^3b^2c^4$	$a^{n+x}b^{n+x}$	=	$(ab)^{n+x}$	$(3ac^2)^w$	$=3^w a^w c^{2w}$

AUFGABEN

$6^4 . 6^5$	=	$3^4 6^4$	=	$(5^3)^4$	=
$6 . 6^8$	=	$a^5b^5c^5$	=	$(6^2)^x$	=
$a^4b^7a^3b^6a^{11}b^5$	=	$(4ab)^r(4ab)^r$	=	$(5ab^c)^3$	=
$xyzx^2y^2z^2x^7$	=	$(5x^7y^3)(5x^2y^8)$	=	$(2a^4b^6c^7)^2$	=
$4a^6b^3 5ab 7b^4$	=	$3a^m 4b^m 5c^m$	=	$(2a^nb^2c^4)^x$	=
$6a^nb^m 3a^{5n}b^{2m}$	=	$4(xy)^n 3(xy)^n$	=	$(4^2)^{2n+2}$	=
$x^{2p}x^{3p}x^{7p}$	=	$4a^p 5b^p 6c^p$	=	$(4abc^3)^{2n+3}$	=
$z^5z^{3n}z^{7m}$	=	$3a^{n+1}4b^{n+1}5c^{n+1}$	=	$(xyz)^2(xy^4)^2$	=

FORMELN

$a^n : a^m$	=	a^{n-m}	$a^n : b^n$	=	$(a:b)^n$	a^{-n}	$=1: (a^n)$

BEISPIELE MIT LÖSUNGEN

$2^{11} : 2^4$	=	2^7	$12^3\ : 6^3$	=	$(12 : 6)^3 = 2^3$	3^{-1}	$=1 : 3$
$2^{19} : 2^{18}$	=	2	$24^5\ : 8^5$	=	$(24:8)^5 = 3^5$	4^{-5}	$=1 : 4^5$
$a^7 : a^3$	=	a^4	$(abc)^7 :(xy)^7$	=	$(abc:xy)^7$	$(x+y)^{-1}$	$=1 : (x+y)$
$y^4 : y^6$	=	y^{-2}	$(abc)^7 :(ab)^7$	=	c^7	$3(x+y)^{-7}$	$=3 : (x+y)^7$
$a^4b^{11} : a^3 b^2$	=	$a b^9$	$2(xy)^n :5(xyz)^n$	=	$2 :(5z^n)$	$3a + y^{-7}$	$=3a + 1:y^7$
$a^n : a^7$		$=a^{n-7}$	$(16ab)^3:(4ab)^3$	=	4^3	$(3ab+4x)^{-6}$	$=1 : (3ab+4x)^6$
$a^{11x} : a^{3x}$	=	a^{8x}	$10^{11}\ :a^{11}$	=	$(10:a)^{11}$	$3abc^{-4}$	$=3ab:c^4$
$a^5 : a^{-3}$	=	a^8	$7a^{11}\ :(3a)^{11}$	=	$7:3^{11}$	$3(abc)^{-4}$	$=3 :(abc)^4$
$a^x : a^{3x-4}$	=	a^{-2x+4}	$(12ab)^n:(4a)^n$	=	$(3b)^n$	xy^{2-n}	$=x : y^{n-2}$
$a : a^{n-1}$	=	a^{2-n}	$(a^7b^3)^q :(a^4b)^q$	=	$(a^3b^2)^q$	$3ab(x+y^2)^{-11}$	$=3ab:(x+y^2)^{11}$

AUFGABEN

5^6	$:5^a$	=	48^4	$:16^4$	=	4^{-3}	=
5^6	$:5^3$	=	21^3	$:7^3$	=	y^{-9}	=
a^3b^2	$:ab^2$	=	$4(xy)^z$	$:3(xy)^z$	=	$4a^{-2}$	=
$30x^4y^7$	$:5x^2y^5$	=	$49(ab)^{11}$	$:7(xy)^{11}$	=	$3ax^{-9}$	=
a^5	$:a^{-6}$	=	$(abc)^7$	$:(xyz)^7$	=	$(xy)^{-3}$	=
a^{-3}	a^{-7}	=	a^{p+q}	$:b^{p+q}$	=	$(3a^4+b^8)^{-3}$	=
a^{3n}	$:a^n$	=	$7x(yz)^3$	$:5xy^3$	=	$(x+y+z)^{-1}$	=
xyz^4	$:x^2y^4z^3$	=	abc^n	$:(abc)^n$	=	$x+(xy)^{-2}$	=

Mathematik 2 — Distributivgesetz

FORMELN

$a(b+c) = ab + ac$

$a(b-c) = ab - ac$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

BEISPIELE MIT LÖSUNGEN

$3x^4(4ab+7pq) = 12abx^4 + 21pqx^4$

$6y^8(9y^7+5y^3) = 54y^{15} + 30y^{11}$

$3p^2q^5(6p^5q - p^9q) = 18p^7q^6 - 3p^{11}q^6$

$(3x+4)(7a+b) = 21ax+3bx+28a+4b$

$(6x+5y)(4x-2) = 24x^2-12x+20xy-10y$

$(3x^4+5xy)(3x^2y^4-6x^7y^3) = 9x^6y^4-18x^{11}y^3+15x^3y^5-30x^8y^4$

AUFGABEN

$9a^3b^4(2ab^9+6a^7b^2) =$

$5x^ny^2(7x^3y^4-2xy^{1-n}) =$

$xyz^2(x^{-3}y^{2n}z^{-1}+x^{12}y^zz^{-4}) =$

$(6ab+3)(7a^2b^4+11) =$

$(a^nb^3-4a^2b)(6ab^n+a^4b^{2n}) =$

$(xy^{-n}+3x^{-3}y)(2x^{-7}y^2-x^{-9}y) =$

BINOMISCHE FORMELN

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

BEISPIELE MIT LÖSUNGEN

$(3x+7y)^2 = 9x^2+42xy+49y^2$

$(5a^4+8b^3)^2 = 25a^8+80a^4b^3+64b^6$

$(x^ny^{2n} - 6x^3y^{-4})^2 = x^{2n}y^{4n} - 12x^{n+3}y^{2n-4}+36x^6y^{-8}$

$(1+k)(1-k) = 1-k^2$

$(11+ab^7)(11-ab^7) = 121-a^2b^{14}$

$(ax^n+p)(ax^n-p) = a^2x^{2n}-p^2$

AUFGABEN

$(5xy^2+2z)^2 =$

$(nx^7-6x^{-3})^2 =$

$(pq+3x^{a+1})^2 =$

$(6a+5p)(6a-5p) =$

$(x^n+1)(x^n-1) =$

$(ab^3+10)(ab^3-10) =$

FORMEL

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

BEISPIELE MIT LÖSUNGEN

$(5x+4y)^3 = (5x)^3 + 3.(5x)^2 4y + 3.5x(4y)^2 + (4y)^3 = 125x^3+300x^2y+240xy^2+64y^3$

$(3a^4+6a^5)^3 = (3a^4)^3 + 3.(3a^4)^2 6a^5 + 3.3a^4(6a^5)^2 + (6a^5)^3 = 27a^{12}+162a^{13}+324a^{14}+216a^{15}$

AUFGABEN

$(4xy-3ab)^3 =$

$(6a^3b^4+2a^2b^3)^3 =$

$(p^5q^6r^4+4p^2q)^3 =$

Mathematik 3 — Faktorisieren

FORMELN

$ab + ac = a(b + c)$

BEISPIELE

$24x^3y^7z^{10} + 72x^{11}y^5z^3 = 24x^3y^5z^3(y^2z^7 + 3x^8)$
$= 12x^2y^2z^2(2xy^5z^8 + 6x^9y^3z)$
$= 6x^5y^7z^n(4x^{-2}z^{10-n} + 12x^6y^{-2}z^{3-n})$

BINOME

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

BEISPIELE

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$
$k^4 + 6k^2 + 9 = (k^2 + 3)^2$

$x^2 - 100 = (x + 10)(x - 10)$
$x^4y^2 - 25a^4b^{10} = (x^2y + 5a^2b^5)(x^2y - 5a^2b^5)$
$1 - 121p^8 = (1 + 11p^4)(1 - 11p^4)$

AUFGABEN

$x^2 + 22x + 121 =$
$x^2 + 8x + 16 =$
$a^2 - 12a + 36 =$
$4p^2 + 24p + 36 =$
$9p^2 + 24pq + 16q^2 =$
$16x^2 + 8x + 1 =$

$x^2 - 16 =$
$a^2 - 16k^8 =$
$(xy)^2 - 1 =$
$100a^4b^8 - 49 =$
$(pq)^{10} - 25 =$
$a^2b^4c^6 - k^6l^8 =$

SONST

$x^2 + 19x + 48 = (\quad)(\quad)$
$(x+\quad)(x+\quad)$
$(x + 16)(x + 3)$

$ac + ad + bc + bd = (a+b)(c+d)$

BEISPIELE

$x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$
$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$
$x^2 + 21x - 100 = (x + 25)(x - 4)$

$6ac + 12ad + 2bc + 4bd = (3a+b)(2c+4d)$
$6ap - 12aq - 3pb + 6bq = (2a-b)(3p-6q)$
$4a^2x + 20a^2b - 3ax - 15ab = (4a-3)(ax+5ab)$

AUFGABEN

$x^2 - 9x - 36 =$
$x^2 + 13x - 48 =$
$x^2 - 15x + 50 =$
$x^2 + 8x - 33 =$
$x^2 - 10x + 24 =$

EINFÜHRUNGSBEISPIEL

$$(x+9)(x-3) \quad = \quad x^2+6x-27$$

$$
\begin{array}{l}
(x^2+6x-27):(x+9) = x-3 \\
\underline{-(x^2+9x)} \\
\quad -3x \\
\quad \underline{-(-3x-27)} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

BEISPIEL MIT REST

$$
\begin{array}{l}
(x^2+6x+100) : (x+9) = x-3+\frac{127}{x+9} \\
\underline{-(x^2+9x)} \\
\quad -3x \\
\quad \underline{-(-3x-27)} \\
\qquad 127
\end{array}
$$

BEISPIELE

$$
\begin{array}{l}
(x^5-x^4 \qquad -16x+16):(x^2+x-2) = x^3-2x^2+4x-8 \\
\underline{-(x^5+x^4-2x^3)} \\
\quad -2x^4+2x^3 \\
\quad \underline{-(-2x^4-2x^3+4x^2)} \\
\qquad 4x^3-4x^2 \\
\qquad \underline{-(4x^3+4x^2-8x)} \\
\qquad\quad -8x^2-8x \\
\qquad\quad \underline{-(-8x^2-8x+16)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(x^4 \qquad -1):(x+1) = x^3-x^2+x-1 \\
\underline{-(x^4+x^3)} \\
\quad -x^3 \\
\quad \underline{-(-x^3-x^2)} \\
\qquad +x^2 \\
\qquad \underline{-(x^2+x)} \\
\qquad\quad -x \\
\qquad\quad \underline{-(-x-1)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(-2x^4+ax^3+3a^2x^2+4x^2-ax-2):(x^2+ax-1) = -2x^2+3ax+2 \\
\underline{-(-2x^4-2ax^3 \qquad +2x^2)} \\
\quad 3ax^3 \qquad 2x^2 \\
\quad \underline{-(3ax^3+3a^2x^2 \qquad -3ax)} \\
\qquad\qquad 2ax \\
\qquad\qquad \underline{-(2x^2+2ax-2)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(x^{n+3}+x^{n+2}-2x^{n+1}-2x^n+x^3-2x):(x^2-2) = x^{n+1}+x^n+x \\
\underline{-(x^{n+3} \qquad -2x^{n+1})} \\
\quad \underline{-(x^{n+2} \qquad -2x^n)} \\
\qquad \underline{-(x^3-2x)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

FORMEL

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=\frac{x+y}{a}$$

BEISPIELE

$$\frac{3}{4}+\frac{a}{4}=\frac{3+a}{4}$$

$$\frac{4}{3ax^2}+\frac{7}{3ax^2}=\frac{11}{3ax^2}$$

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4a}{x}=\frac{12+z+4a}{x}$$

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a+b}+\frac{3}{a+b}=\frac{x+y+3}{a+b}$$

FORMEL

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{bx+ay}{ab}$$

BEISPIELE

$$\frac{4}{3}+\frac{7}{5}=\frac{4.5+7.3}{3.5}=\frac{41}{15}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{b}{7}=\frac{7x+3b}{21}$$

$$\frac{4a+b}{2}+\frac{6}{x}=\frac{(4a+b)x+6.2}{2x}$$

$$\frac{3}{a-b}+\frac{4}{a+b}=\frac{3(a+b)+4(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{7a-b}{a^2-b^2}$$

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^2+2x+1}+\frac{4}{x^3-x^2}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}+\frac{3}{(x+1)(x+1)}+\frac{4}{x^2(x-1)}=$$

$$\begin{array}{llll}
\text{HN:} & x & (x+1) & \\
 & & (x+1) & (x-1) \\
 & & (x+1)(x+1) & \\
 & \underline{xx} & & \underline{(x-1)} \\
\text{HN} = & x^2 & (x+1)(x+1) & (x-1)
\end{array}$$

$$=\frac{1x(x+1)(x-1)+2x^2(x+1)+3x^2(x-1)+4(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)(x+1)(x-1)}=\frac{x^3-x+2x^3+2x^2+3x^3-3x^2+4x^2+8x+4}{x^2(x+1)(x+1)(x-1)}=\frac{6x^3+3x^2+7x+4}{x^2(x+1)(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{7}{12}+\frac{1}{8}+\frac{5}{6}+\frac{2}{9}+\frac{5}{18}+\frac{11}{24}-\frac{1}{12}=\frac{4.48+5.36+7.12+1.18+5.24+2.16+5.8+11.6-1.12}{144}=5$$

$$\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^7}+\frac{c}{x^n}+\frac{d}{x^{2n+1}}+\frac{e}{x^{-4}}+\frac{f}{x^a}=\frac{ax^{2n-2}+bx^{2n-6}+cx^{n+1}+d+ex^{2n+5}+fx^{2n+1-a}}{x^{2n+1}}$$

oder

$$=\frac{ax^{n-3}+bx^{n-7}+c+dx^{-n-1}+ex^{n+4}+fx^{n-a}}{x^n}$$

Mathematik 6 — Wurzelrechnung

DEFINITION:

$$b^n = a \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{a} = b$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \Rightarrow \sqrt[2]{9} = \pm 3$$
$$x^5 = 32 \rightarrow x = 2 \Rightarrow \sqrt[5]{32} = +2$$
$$x^3 = -125 \rightarrow \sqrt[3]{-125} = -5$$
$$x^4 = 256 \rightarrow \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

$$\sqrt[2]{-100} \notin \mathrm{R}$$

$$\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$$

FORMEL:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

BEISPIELE:

$$\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{7}{3}}; \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}; \sqrt[a]{x^{11}} = a^{\frac{11}{a}}$$

FORMEL:

$$\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[3]{4} . \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4.2} = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{144} : \sqrt{16} = \sqrt{\frac{144}{16}} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[7]{a}} = \sqrt[21]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} . \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$$

BEISPIELE:

$$\sqrt[3]{a^7} . \sqrt{a} . a . \sqrt[4]{a^3} . \sqrt[8]{a^5} . \sqrt[24]{a^{19}} = a^{\frac{7}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^1 a^{\frac{3}{4}} a^{\frac{5}{8}} a^{\frac{19}{24}} = a^{\frac{7.8+1.12+24+3.6+5.3+19.1}{24}} = a^6$$

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$$

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$$

Mathematik 7 — Gleichungen 1. Grades

Allgemeine Form: $x a + b = 0$ mit $a, b \in R$ und $a \neq 0$

BEISPIELE

$$
\begin{aligned}
11(4x+3)+9 &= 3(1-6x)+70 \\
44x+33+9 &= 3-18x+70 \\
44x+42 &= -18x+73 \\
62x &= 31 \\
x &= 0{,}5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(8x-3)^2 &= (16x-5)4x+37 \\
64x^2-48x+9 &= 64x^2-20x+37 \\
-48x+9 &= -20x+37 \\
-28x &= 28 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

KONSTANTE a IN DER AUFGABE

$$
\begin{aligned}
-3x+6a &= -5x-12a+4 \\
2x &= -18a+4 \\
x &= -9a+2
\end{aligned}
$$

Die Konstante a ist im Zähler: $a \in R$

$$
\begin{aligned}
3x(a+4)-5 &= 6(1+3x)+7 \\
3ax+12x-5 &= 6+18x+7 \\
3ax-6x &= 18 \\
3x(a-2) &= 18 \\
x(a-2) &= 6 \\
x &= \frac{6}{a-2}
\end{aligned}
$$

Die Konstante ist in der Lösung im Nenner: $a \neq 2$

Sonderfälle:

$$
\begin{aligned}
x+3 &= x+10 \\
0 &= 7
\end{aligned}
$$

d.h. es ist ein Widerspruch und es ex. keine Lösung

$$
\begin{aligned}
12x+6 &= 4(3x+1{,}5) \\
12x+6 &= 12x+6 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

d.h. diese Gleichung ist für jedes $x \in R$ richtig

$$
\begin{aligned}
3x &= 7x \\
0 &= 4x \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

PROPORTIONEN:

$x:a = b:c$

$xc = ab$ **das Produkt der Außenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder**

$x = \frac{ab}{c}$

Mathematik 8 Gleichungen 2. Grades

Allgemeine Form : $a x^2 + b x + c = 0$ mit $a,b,c \in$ R und $a \neq 0$

Normalform: $x^2 + p x + q = 0$ mit $p,q \in R$

p - q - Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN:

1. Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 12 &= 0 \\
x^2 - x &= 12 \\
x^2 - x + 0{,}5^2 &= 12 + 0{,}5^2 \\
(x - 0{,}5)^2 &= 12{,}25 \\
x - 0{,}5 &= \pm 3{,}5 \\
x &= \pm 3{,}5 + 0{,}5 \\
x_1 &= 4 \\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + 11x + 24 &= 0 \\
x^2 + 11x &= -24 \\
x^2 + 11x + 5{,}5^2 &= -24 + 5{,}5^2 \\
(x + 5{,}5)^2 &= 6{,}25 \\
x + 5{,}5 &= \pm 2{,}5 \\
x &= -5{,}5 \pm 2{,}5 \\
x_1 &= -3 \\
x_2 &= -8
\end{aligned}$$

2. p - q - Formel

$x^2 - x - 12 = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-12)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{7}{2} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -3$$

$x^2 + 11x + 24 = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - 24} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{96}{4}} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -8$$

3. Faktorisieren

$$\begin{aligned}
x^2 - x - 12 &= 0 \\
(x-4)(x+3) &= 0 \\
x_1 &= 4 \\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 + 11x + 24 &= 0 \\
(x+3)(x+8) &= 0 \\
x_1 &= -3 \\
x_2 &= -8
\end{aligned}$$

Mathematik 9 Gleichungen 3. Grades

ALLGEMEINE FORM: $x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ **mit a,b,c,d $\in$ R und $a \neq 0$**

FALL 1: $c\,,d = 0$

$6\,x^3 + 12\,x^2 = 0$
$6\,x^2\,(x + 2) = 0$
$x_{1,2} = 0\,,\ x_3 = -2$

Hinweis: Jedes ausgeklammerte x hat die Lösung Null.
Zu dem Linearfaktor (x - a) gehört die Lösung x = a.

FALL 2 : $d = 0$

$x^3 - 2\,x^2 - 15\,x = 0$
$x\,(x^2 - 2\,x - 15) = 0$
$x\,(x - 5)(x + 3) = 0$
$x_1 = 0,\quad x_2 = +5,\quad x_3 = -3$

Hinweis: Die nach dem Faktorisieren mit x verbleibende quadratische Gleichnung löst man erneut durch Faktorisieren, durch die p-q- Formel oder mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

FALL 3: $b\,,c = 0$

$x^3 - 8 = 0$
$x_1 = 2$
$(x^3 - 8) : (x - 2) = x^2 + 2\,x + 4$
$x^2 + 2\,x + 4 = 0$
$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{-3} \notin R$

Hinweis: Eine Gleichnung 3. Grades die nur das kubische und das absolute Glied enthält, hat immer eine reelle und zwei komplexe Lösungen, wie man mit algebraischer Division durch den Linearfaktor der ersten Lösung feststellen kann.

FALL 4:

$(x - 4)^3 = x^3 - 12\,x^2 + 48\,x - 64 = 0$
$x_{1,2,3} = 4$

Hinweis: Bei drei gleichen Linarfaktoren gibt es entsprechend drei gleiche Lösungen.

FALL 5:

$x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6 = 0$
Lösung durch Probieren: $x_1 = 1$ **mit anschließender algebrischer Division**
$(x^3 - 2\,x^2 - 5\,x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$
$x^2 - x - 6 = 0$ **Lösung der quadratischen Gleichung**
$(x - 3)(x + 2) = 0$
$x_2 = 3 \quad x_3 = -2$

Hinweis: Eine Lösung suchen und algebraische Division mit dem Linearfaktor der ersten Lösung.

Mathematik 10 Gleichungen 4. Grades

ALLGEMEINE FORM: $a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e = 0$ mit $a,b,c,d,e \in R$ und $a \neq 0$

FALL 1: $c, d, e = 0$

$5x^4 + 15x^3 = 0$
$5x^3(x+5) = 0$
$x_{1,2,3,} = 0 \quad x_4 = -5$

FALL 2: $b, d, e = 0$

$3x^4 - 12x^2 = 0$
$3x^2(x^2 - 4) = 0$
$x_{1,2} = 0 \quad x_{3,4} = \pm 2$

FALL 3: $d, e = 0$

$x^4 - 13x^3 - 48x^2 = 0$
$x^2(x^2 - 13x - 48) = 0$
$x^2(x - 16)(x + 3) = 0$
$x_{1,2} = 0 \quad x_3 = 16 \quad x_4 = -3$

FALL 4: $e = 0$

$x^4 - 4x^3 - 44x^2 + 96x = 0$
$x(x^3 - 4x^2 - 44x + 96) = 0$
$x_1 = 0$ Lösung durch Probieren: $x_2 = 2$
Algebraische Division:
$(x^3 - 4x^2 - 44x + 96) : (x - 2) = x^2 - 2x - 48$
Lösung der quadratischen Gleichung:
$x^2 - 2x - 48 = 0$
$(x - 8)(x + 6) = 0$
$x_3 = 8 \quad x_4 = -6$

FALL 5:

$(x - 7)^4 = 0$
$x_{1,2,3,4} = 7$

FALL 6:

$(x - 1)^2 (x - 9)^2 = 0$
$x_{1,2} = 1 \quad x_{3,4} = 9$

FALL 7: $b, d = 0$ (Biquadratische Gleichungen)

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ Setze $x^2 = z$ und löse die quadratische Gleichung nach z auf.
$z^2 - 5z + 4 = 0$
$(z - 4)(z - 1) = 0$
$z_1 = 4 \quad z_2 = 1$
$x_{1,2} = \pm 2 \quad x_{3,4} = \pm 1$

Mathematik 11 — Komplexe Zahlen

Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$ hat die nicht reelle Lösung $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$.

Definition: $i = +\sqrt{-1}$

Folgerung:

i	=	$\sqrt{-1}$	=	i^5	=	i^9	usw.
i^2	=	-1	=	i^6	=	i^{10}	usw.
i^3	=	$-i$	=	i^7	=	i^{11}	usw.
i^4	=	$+1$	=	i^8	=	i^{12}	usw.

Gerade (ungerade) Exponenten von i sind reelle (nicht reelle) Lösungen.

Definition: Jede Zahl $z = a + b\,i$ mit a , b aus den reellen Zahlen heißt KOMPLEXE ZAHL.
a heißt Realteil und b i heißt Imaginärteil der komplexen Zahl.

Definition: Die Menge aller komplexen Zahlen heißt C.

Folgerung: Für b = 0 ist jede komplexe Zahl eine reelle Zahl.

Folgerung: Die reellen Zahlen sind in den komplexen Zahlen enthalten.

Definition: Es sei $z = a + b\,i$. Dann heißt die zu z konjugiert komplexe Zahl $z^* = a - b\,i$.

Folgerung: Konjugiert komplexe Zahlen unterscheiden sich im Vorzeichen des Imaginärteiles.

Satz: Summe und Produkt konjugiert komplexer Zahlen sind reelle Zahlen.

Beweis: $(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2a$ aus der Menge der reellen Zahlen.
$(a + b\,i)(a - b\,i) = a^2 - b^2 i^2$ mit $i^2 = -1$ folgt $a^2 + b^2$ aus der Menge der reellen Zahlen.

Beispiel:

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$
$$x^2 - 6x + 3^2 = -13 + 3^2$$
$$(x - 3)^2 = -4$$
$$x_{1,2} = +3 \pm \sqrt{-4} = +3 \pm 2i$$

mit $(3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$

HINWEIS:

Da bei der Lösung von Gleichungen komplexe Lösungen nur in der Form konjugiert komplexer Lösungen auftreten können, kann es immer nur eine gerade Anzahl von komplexen Lösungen geben.

Bei Gleichungen 2 Grades gibt es also entweder nur 2 reelle oder 2 komplexe Lösungen.
Bei Gleichungen 3. Grades gibt es also entweder 3 reelle oder eine reelle und zwei komplexe Lösungen.
Bei Gleichungen 4 Grades können 4 reelle, 4 komplexe oder 2 reelle und 2 komplexe Lösungen auftreten.
Für Gleichungen höheren Grades gilt alles analog.

Mathematik 12 LGS

1. 2 Gleichungen mit 2 Variablen

Inhomogene lineare Gleichungssysteme

1.1.

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x + 4y & = & 2 \\
\text{II} & 5x - 10y & = & 20
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
5\text{I} & 15x + 20y & = & 10 \\
3\text{II} & \underline{15x - 30y} & \underline{=} & \underline{60} \\
5\text{I}-3\text{II} & 50y & = & -50
\end{array}$$

$y = -1$ eingesetzt in I : $3x + 4(-1) = 2$ liefert $x = 2$

LÖSUNG: genau eine: L (2 / -1)

1.2.

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x + 11y & = & 5 \\
\text{II} & 3x + 11y & = & 7
\end{array}$$

I – II liefert : $0 = -2$ Widerspruch

LÖSUNG : keine $L = \{ \}$

1.3.

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x + 6y & = & 18 \\
\text{II} & 0{,}5x + y & = & 3
\end{array}$$

I – 6II liefert : $0 = 0$

LÖSUNG : beliebig viele: L = R

Homogene lineare Gleichungssysteme

1.4.

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x + 7y & = & 0 \\
\text{II} & 5x + 2y & = & 0
\end{array}$$

LÖSUNG : genau eine L=(0/0) oder beliebig viele: L = R

Inhomogene Gleichungssysteme haben auf der rechten Seite mindestens einer Wert ungleich Null.
Homogene Gleichungssysteme haben auf der rechten Seite lauter Nullen.
Inhomogene LGS haben genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen.
Homogene LGS haben immer die Lösung Null für jede Variable oder unendlich viele Lösungen falls eine Zeile aus lauter Nullen besteht.

2. 3 Gleichungen mit 3 Variablen

2.1.

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x + 2y - 5z & = & -8 \\
\text{II} & x + 9y - 9z & = & 0 \\
\text{III} & 12x + y - 12z & = & -14
\end{array}$$

Zuerst wird aus je zwei Gleichungen eine Variable (in diesem Fall die Variable x) entfernt:

$$\begin{array}{llcl}
\text{I} & 3x + 2y - 5z & = & -8 \\
\underline{3\text{II}} & \underline{3x + 27y - 27z} & \underline{=} & \underline{0} \\
3\text{II}-\text{I} & 25y - 22z & = & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
4\text{I} & 12x + 8y - 20z & = & -32 \\
\underline{\text{III}} & \underline{12x + y - 12z} & \underline{=} & \underline{-14} \\
4\text{I}-\text{III} & 7y - 8z & = & -18
\end{array}$$

Die beiden Ergebnisse der obigen Operation ergeben die Gleichungen IV und V:

$$\begin{array}{llcl}
\text{IV} & 25y - 22z & = & 8 \\
\text{V} & 7y - 8z & = & -18
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
4\text{IV}: & 100y - 88z & = & 32 \\
\underline{11\text{V}:} & \underline{77y - 88z} & \underline{=} & \underline{-198} \\
4\text{IV}-11\text{V}: & 23y & = & 230 \\
 & y & = & 10
\end{array}$$

eingesetzt in IV oder V liefert $z = 11$ und y und z eingesetzt in I, II oder III liefert $x = 9$, daraus folgt die Lösung: L = (9 / 10 / 11)

Funktionen 1. Grades

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = mx + b$$

mit b, m aus der Menge der reellen Zahlen und m ungleich Null.
Der Graph einer Funktion ersten Grades ist eine Gerade.
Der Anstieg der Funktion $f(x) = mx + b$ ist definiert als

$m = \tan \alpha$ wobei der Tangens eines Winkels das Verhältnis von Gegenkathete zur Ankathete ist.

Falls m den Wert Null hat, verläuft der Graph der Funktion parallel zur Abszisse und schneidet die Ordinate in b.

Senkrechte Geraden im Koordinatensystem sind keine Funktionen und statt der Bezeichnung f(x) verwendet man die Form $x = a$, wobei die Senkrechte die Abszisse in a schneidet.

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

1. Bestimmung des Schnittpunktes mit der Abszisse
   Setze $f(x) = 0$
   $mx + b = 0$ $\quad x_0 = - b/m$
   x_0 heißt Nullstelle

   Der Schnittpunkt mit der Abszisse wird als $P_x (x_0 / 0)$ bezeichnet.
   Die Nullstelle ist also der x-Wert des Schnittpunktes mit der Abszisse.

2. Bestimmung des Schnittpunktes mit der Ordinate

   Alle Werte auf der Ordinate haben den x-Wert Null.
   Der Schnittpunkt mit der Ordinate wird als $P_y (0 / b)$ bezeichnet.

Multiplikation des Funktionstermes mit einem Faktor k

Falls der Funktionsterm mx+ b mit einem Faktor multipliziert wird ergibt sich folgende Form:

$k(mx + b)$

falls k größer ist als Eins, verläuft der Graph steiler (Streckung),
falls k zwischen Null und Eins ist, verläuft der Graph flacher (Stauchung),
falls k der Wert –1 hat, wird der Graph an der Abszisse gespiegelt.

Bei Streckung, Stauchung und Spiegelung an der Abszisse bleibt die Nullstelle erhalten.

Spiegelung
   an der Ordinate erfolgt durch Umkehrung des Vorzeichens des Anstieges m.
   an der Winkelhalbierenden im 1. Quadranten führt zur Umkehrfunktion.

Funktionen 2. Grades

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet

$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

und die Normalform einer Funktion 2. Grades lautet:

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

mit a, b, c aus der Menge der reellen Zahlen und a ungleich Null.

1. Bestimmung der Nullstellen von Funktionen 2. Grades

Für Funktionen 2. Grades

- mit einem Term der Form $f(x) = x^2 + c$
  lauten die Nullstellen $x_{01,02} = \pm\sqrt{-c}$

- mit einem Term der Form $f(x) = x^2 + bx$
  lauten die Nullstellen $x_{01} = 0$, $x_{02} = -b$
  (falls man x ausklammern kann, ist eine Nullstelle bei Null und die andere Nullstelle ist der Koeffizient von x mit umgekehrtem Vorzeichen)

- mit einem Term der Form $f(x) = x^2 + 2bx + b^2$
  lauten die Nullstellen $x_{01,02} = -b$
  (falls der Funktionsterm dem ersten oder zweiten Binom entspricht, gibt es zwei gleiche Nullstellen und der Extremwert des Graphen liegt auf der Abszisse)

- einer beliebigen Form $f(x) = ax^2 + bx + c$
  erhält man die Nullstellen mit der p-q-Formel, der quadratischen Ergänzung oder durch Faktorisieren.

2. Die Bedeutung der Koeffizienten a, b und c im Funktionsterm

Der Koeffizient c verschiebt den Graphen der Funktion im Koordinatensystem senkrecht nach oben (c ist positiv) oder unten (c ist negativ).
Der Koeffizient b verschiebt den Graphen der Funktion im Koordinatensystem nach rechts für negative Werte von b oder links für positive Werte von b.
Der Koeffizient a staucht bzw. streckt den Graphen der Funktion im Koordinatensystem. Für $a = -1$ wird der Graph der Funktion an der Abszisse gespiegelt.

Funktionen 3. Grades

Die allgemeine Form der Funktionsgleichung lautet:

$$\mathbf{f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$$

mit a,b,c,d aus der Menge der reellen Zahlen und a ungleich Null.

1. Bestimmung der Nullstellen von Funktionen 3. Grades

F. 3. G. haben entweder genau eine reelle und zwei komplexe *oder* genau drei reelle Nullstellen. F. 3. G. schneiden die Abszisse mindestens einmal.

Funktionen 3. Grades der Form

- $f(x) = a\,x^3$ haben eine dreifache Nullstelle (Sattelpunkt) bei $x = 0$.
- $f(x) = x^3 + d$ haben zwei komplexe und eine einfache Nullstelle bei $x = \sqrt[3]{-d}$.
- $f(x) = x^3 + c\,x = x\,(x^2 + c)$ haben eine NS bei $x = 0$ und zwei NS bei $x = \pm\sqrt{-c}$.
- $f(x) = x^3 + b\,x^2 = x^2\,(x + b)$ haben zwei NS bei $x = 0$ und eine NS bei $x = -b$.
- $f(x) = (x + k)^3$ haben eine dreifache NS (Sattelpunkt) bei $x = -k$.
- $f(x) = x^3 + b\,x^2 + c\,x = x\,(x^2 + b\,x + c)$ haben eine NS bei $x = 0$ und die beiden anderen NS lassen sich durch Lösung der verbleibenden quadratische Gleichung $x^2 + b\,x + c = 0$ ermitteln.

2. Skizzieren Sie die Graphen von Funktionen 3. Grades

Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen f (x) anhand der Nullstellen und des Schnittpunktes mit der Ordinate in einem Koordinatenkreuz

$= x^3$	$= -x^3$		
$= x^3 + 4$	$= x^3 - 6$	$= x^3 + 1$	$= x^3 - 2$
$= x^3 - 25\,x$	$= x^3 - 4\,x$	$= x^3 - 9\,x$	$= x^3 - x$
$= (x - 2)^3$	$= (x + 4)^3$	$= (x + 3)^3$	$= (x - 5)^3$
$= x^3 + 5\,x^2$	$= x^3 - 2\,x^2$	$= x^3 + 6\,x^2$	$= x^3 - 3\,x^2$
$= x^3 - 3\,x^2 - 10\,x$	$= x^3 - 4\,x^2 - 12\,x$	$= x^3 - 3\,x^2 - 4\,x$	$= x^3 + 3\,x^2 - 18\,x$
$= x^3 - 2\,x^2 - 15\,x$	$= x^3 - x^2 - 12\,x$	$= x^3 + x^2 - 6\,x$	$= x^3 + 3\,x^2 - 10\,x$
$= x^3 + x^2 - 9\,x - 9$	$= x^3 + 2\,x^2 - 9\,x - 18$	$= x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 27$	$= x^3 - 2\,x^2\,4\,x + 8$
$= x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12$	$= x^3 + 2\,x^2 - x - 2$	$= x^3 + 2\,x^2 + 9\,x + 18$	$= x^3 - x^2 - 4\,x + 4$
$= 2\,x^3$	$= 5\,x^3$	$= -0{,}5\,x^3$	$= -4\,x^3$

Bestimmen Sie eine Funktion 3. Grades zu folgenden 4 gegebenen Punkten:

1. P (1 / 5) Q (0 / 3) R (2 / 9) S (5 / 27)
2. P (1 / - 32) Q (0 / - 27) R (4 / 49) S (2 / - 25)

Funktionen 4. Grades

Die allgemeine Form der Funktionsgleichung lautet:

$$\mathbf{f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e}$$

mit a,b,c,d,e, aus der Menge der reellen Zahlen und a ungleich Null.

Falls der Koeffizient a positiv (negativ) ist, verläuft der Graph der Funktion von oben links nach oben rechts (von unten links nach unten rechts).

1. Bestimmung der Nullstellen einer Funktion 4. Grades

Funktionsgleichungen der Form

- $f(x) = a\,x^4$ haben eine vierfache NS bei $x = 0$.
- $f(x) = x^4 + e$ haben zwei reelle NS bei $x = \pm\sqrt[4]{-e}$ und zwei komplexe NS.
- $f(x) = x^4 + d\,x^3 = x^3\,(x + d)$ haben eine dreifache NS bei x=0 und eine einfache bei $x = -d$.
- $f(x) = x^4 + c\,x^2 = x^2(x^2 + c)$ haben eine doppelte NS bei $x = 0$ und zwei NS bei $x = \pm\sqrt{-c}$.
- $f(x) = x^4 + c\,x^2 + e$ (sogenannte biquadratische F. 4. G.) haben paarweise gleiche Lösungen mit umgekehrten Vorzeichen (vgl. auch Lösung von biquadratischen Gleichungen indem $x^2 = z$ gesetzt wird).
- In allen anderen Fällen wird eine Lösung $x = a$ durch Probieren gesucht und dann das Verfahren der algebraischen Division (Division durch den Linearfaktor $(x - a)$) angewendet.

  HINWEIS: Komplexe Lösungen von Gleichungen treten immer nur paarweise auf.

2. Skizzieren Sie die folgenden F. 4. G.

Skizzieren Sie die Graphen von folgenden Funktionsgleichungen f (x) anhand der Nullstellen und des Schnittpunktes mit der Ordinate.

$= x^4$	$= -x^4$		
$= x^4 + 5\,x^3$	$= x^4 - 2\,x^3$	$= x^4 + 3\,x^3$	$= x^4 - 7\,x^3$
$= x^4 - 16\,x^2$	$= x^4 - 9\,x^2$	$= x^4 - 25\,x^2$	$= x^4 - x^2$
$= x^4 + 27\,x$	$= x^4 - 8\,x$	$= x^4 - 64\,x$	$= x^4 + 125\,x$
$= x^4 - 10\,x^2 + 9$	$= x^4 - 40\,x^2 + 144$	$= x^4 - 5\,x^2 - 36$	$= x^4 + 3\,x^2 + 2$
$= x^4 - 13\,x^2 - 12x$	$= x^4 - 3\,x^2 - 2\,x$	$= x^4 - 2\,x^3 - 8\,x^2$	$= x^4 + 6\,x^3 + 9\,x^2$
$= x^4 + 3\,x^3 - 15\,x^2 - 19\,x + 30$		$= x^4 + 2\,x^3 - 21\,x^2 - 22\,x + 40$	
$= x^4 - 8\,x^3 + 6\,x^2 + 40\,x + 25$		$= x^4 + 2\,x^3 - 7\,x^2 + 2\,x - 8$	

Funktionen höheren Grades

Die allgemeine Funktionsgleichung f (x) einer Funktion n-ten Grades lautet:

$$\mathbf{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

mit $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots a_2, a_1, a_0,$ aus der Menge der reellen Zahlen
und a_n ungleich Null.

Der Graph der Funktionen verläuft

- (falls der Koeffizient a_n positiv ist)
  und wenn n eine gerade Zahl ist
  von links oben nach rechts oben.
  und wenn n eine ungerade Zahl ist
  von links unten nach rechts oben.
- (falls der Koeffizient a_n negativ ist)
  und wenn n eine gerade Zahl ist
  von links unten nach rechts unten.
  und wenn n eine ungerade Zahl ist
  von links oben nach rechts unten.

Funktionen n –ten Grades haben immer n Nullstellen, n-1 Extremwerte und n-2 Wendepunkte.
Von dieser Anzahl der Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte sind nicht immer alle Werte reell. Da konjugiert komplexe Zahlen immer nur paarweise mit verschiedenen Vorzeichen auftreten können, ist die Anzahl der reellen Lösungen entsprechend definiert.

In folgender Tabelle ist eine Übersicht für mögliche Nullstellen von f(x) aufgelistet:

Grad der Funktion	f (x) =	Anzahl der Nullstellen	
		Reelle	komplexe
1	m x + b	1	0
2	$ax^2 + b x + c$	2 einfache	0
		1 doppelte	0
		0	2
3	ax^3+bx^2+cx+d	3 einfache	0
		1 einfache und 1 doppelte	0
		1dreifache	0
		1 einfache	2
4	$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$	4 einfache	0
		2 einfache und 1 doppelte	0
		2 doppelte	0
		1 dreifache und 1 einfache	0
		1 vierfache	0
		2 einfache	2
		1 doppelte	2
		0	4

Für Funktionen höheren Grades gilt die Tabelle analog.

Folgen und Reihen

Allgemeine Folgen und Reihen

Definition einer endlichen Folge: $\langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, \ \ldots \ , a_n \rangle \quad mit \quad a_n \in \Re$

Definition einer unendlichen Folge: $\langle a_n \rangle_{n \in N} = \langle a_1, a_2, \ \ldots \ , a_n, \ \ldots \rangle \quad mit \quad a_n \in \Re$

Definition einer Reihe: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n$

Hinweis: Eine Folge wird zu einer Reihe, wenn man die Kommata durch Additionszeichen ersetzt.

Arithmetische Folgen und Reihen

Definition: Eine Folge heißt arithmetisch, wenn gilt: $a_{n+1} - a_n = d$
wobei d eine konstante Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist.

Beispiele: $a_1 = 3 \quad d = 5 \quad n = 7 \qquad \langle a_n \rangle_{1 \le n \le 7} = \langle 3,8,13,18,23,28,33 \rangle$

$b_1 = 10 \quad d = -3 \quad n = 10 \qquad \langle b_n \rangle_{1 \le n \le 10} = \langle 13,10,7,4,1,-2,-5,-8,-11,-14 \rangle$

Formeln

für das n-te Glied einer arithmetischen Folge: $a_n = a_1 + (n-1)\, d$

für die Summe der ersten n Glieder einer Reihe: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

oder wenn statt a_n der Wert d gegeben ist: $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

Geometrische Folgen und Reihen

Definition: Eine Folge heißt geometrisch, wenn gilt: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

wobei q der konstante Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist.

Beispiele: $a_1 = 4 \quad q = 2 \quad n = 5 \qquad \langle a_n \rangle_{1 \le n \le 5} = \langle 4,8,16,32,64 \rangle$

$b_1 = 8 \quad q = \frac{1}{3} \quad n = 6 \qquad \langle b_n \rangle_{1 \le n \le 6} = \left\langle 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \frac{8}{27}, \frac{8}{81}, \frac{8}{243} \right\rangle$

Formeln

für das n-te Glied einer geometrischen Folge: $a_n = a_1\, q^{n-1}$

für die Summe der ersten n Glieder einer Reihe: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Grenzwerte von Folgen

Definition:

Eine Zahl g mit g aus der Menge der reellen Zahlen heißt GRENZWERT einer Folge, wenn sich die Glieder der Zahlenfolge mit wachsendem n (d.h. mit wachsender Platzziffer) der Zahl g beliebig annähern.
Eine Folge für die ein Grenzwert existiert heißt konvergent.
Eine Folge ohne Grenzwert heißt divergent.

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty}\langle a_n\rangle = g$

Hinweis: Eine Folge mit dem Grenzwert Null heißt Nullfolge.

Verfahren zur Grenzwertbestimmung:

1. Das Argument strebt gegen unendlich $(n \to \infty)$

1. Fall: Der höchste Exponent der Variablen steht im Zähler

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^7+4n^3+11n-9}{6n^4-3n^2-7} = \infty$$

2.Fall: Der höchste Exponent der Variablen steht im Nenner

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^7-6n^5+9n-1}{7n^{12}+4n-1000} = 0$$

3. Fall: Der höchste Exponent der Variablen ist im Zähler und Nenner gleich:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^4-11n^3-n+2}{3n^4-8n^2-2} = \frac{7}{3}$$

2. Das Argument strebt gegen eine Konstante aus der Menge der reellen Zahlen

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(x_k \pm \varepsilon)$$

Grenzwertsätze

1. Sind die Folgen $\langle a_n\rangle$ und $\langle b_n\rangle$ Nullfolgen, so ist auch die Folge $\langle a_n \pm b_n\rangle$ Nullfolge.

2. Ist $\langle a_n\rangle$ eine Nullfolge und $\langle b_n\rangle$ eine beschränkte Folge, so ist auch $\langle a_n b_n\rangle$ Nullfolge.

3. Eine Folge $\langle a_n\rangle$ heißt konvergent, wenn die Folge $\langle a_n - g\rangle$ eine Nullfolge bildet, wobei gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

4. Eine Zahl g heißt Grenzwert einer Folge, wenn in jeder beliebig kleinen Umgebung des Grenzwertes unendlich viele Glieder der Folge und außerhalb der Umgebung nur endlich viele Glieder der Folge liegen.

Differentialrechnung

Beispiel: Allgemeine Berechnung:

$f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x-4)$ $x_{01,02,03} = 0 \quad x_{04} = 4$ NS: f(x) = 0

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$ $x_{11,12} = 0 \quad x_{13} = 3$ EX: f ′ (x) = 0

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x\ (x-2)$ $x_{21} = 0 \quad x_{22} = 2$ WP: f ′′ (x) = 0

Max oder Min ?

$f''(x_{11}) = f''(0) = 0 \Rightarrow \text{weder / noch}$
$f''(x_{13}) = f''(3) = 36 \Rightarrow \text{Min}(3/-27)$

$f''(x) \geq 0 \Rightarrow \text{Min}$
$f''(x) \leq 0 \Rightarrow \text{Max}$
$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{weder / noch}$

Krümmungsverhalten im Wendepunkt:

$f'''(x_{21}) = f'''(0) = -24 \leq 0 \Rightarrow l/r - \text{Übergang}$
$f'''(x_{22}) = f'''(2) = +24 \geq 0 \Rightarrow r/l - \text{Übergang}$

$f'''(x) \leq 0 \Rightarrow l/r$
$f'''(x) \geq 0 \Rightarrow r/l$

Wendepunkt: WP (2 / - 16) Sattelpunkt: SP (0 / 0)

Hinweis: Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt:
$f'(x) = 0 \quad f''(x) = 0 \quad f'''(x) \neq 0$

Tangente im Wendepunkt: WP (2 / -16) und den Anstieg m = f ′(x) = - 16 in die allgemeine Geradengleichung g (x) = m x + b einsetzen.
Ansatz: -16 = (- 16) 2 + b b = 16 $t_{WP}(x) = -16x + 16$

Normale im Wendepunkt: WP (2 / - 16) und den Anstieg der Normalen $m_n = -\frac{1}{m} = \frac{1}{16}$ einsetzen:
$-16 = \frac{1}{16}2 + b \Rightarrow b = -\frac{129}{16} \Rightarrow t_n(x) = \frac{1}{16}x - \frac{129}{16}$

Parallele zur Wendetangente: Setze f ′(x) = Anstieg des Wendepunktes
Algebraische Division durch den Linearfaktor des x - Wertes des Wendepunktes zum Quadrat liefert den x - Wert des gesuchten Berührpunktes BP
$(4x^3 - 12x^2 + 16) : (x-2)^2 = 4x + 4 \Rightarrow x = -1$
BP (-1 / 5) und den Anstieg des Wendepunktes m = - 16 in die Geradengleichung einsetzen, liefert:
$t_p(x) = -16x - 11$

Tangente in der einfachen Nullstelle: $t(x) = 64x - 256$

Ableitungsregeln

Bilden Sie die erste Ableitung und fassen Sie - soweit wie möglich- zusammen:

1) $f(x) = (6x^4 + 3x^2 + px^2 + 1)^{2n-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{3}{7ax + by - (xy)^n}$

3) $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{bx^2 + cx}\right)^{n+1}$ 4) $f(x) = \dfrac{ax^4 + b}{x^3}$

5) $f(x) = \dfrac{(x-a)^3}{x^3}$ 6) $f(x) = x^3 \cdot (bx^3 + cx + d)^{3n}$

7) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$ 8) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{25 - x^2}}$

Lösungen:

1) $f`x) = \underline{\underline{(2n-1)(6x^4 + 3x^2 + px^2 + 1)^{2n-2} \cdot (24x^3 + 6x + 2px)}}$

2) $f`(x) = \dfrac{0 \cdot [7ax + by - (xy)^n] - 3[7a - n(xy)^{n-1} \cdot y]}{[7ax + by - (xy)^n]^2} = \underline{\underline{\dfrac{-21a + 3ny(xy)^{n-1}}{[7ax + by - (xy)^n]^2}}}$

3) $f`(x) = (n+1)\left(\dfrac{2x+1}{bx^2 + cx}\right)^n \cdot \dfrac{2(bx^2 + cx) - (2x+1)(2bx + c)}{(bx^2 + cx)^2} =$

$(n+1)\left(\dfrac{2x+1}{bx^2 + cx}\right)^n \cdot \dfrac{-2bx^2 - 2bx - c}{(bx^2 + cx)^2} = \underline{\underline{\dfrac{(n+1)(2x+1)^n(-2bx^2 - 2bx - c)}{(bx^2 + cx)^{n+2}}}}$

4) $f`(x) = \dfrac{4ax^3 \cdot x^3 - (ax^4 + b) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{4ax^4 - 3ax^4 - 3b}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{ax^4 - 3b}{x^4}}}$

5) $f`(x) = \dfrac{3(x-a)^2 \cdot 1 \cdot x^3 - (x-a)^3 \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{3(x-a)^2 \cdot x - (x-a)^3 \cdot 3}{x^4} =$

$\dfrac{3(x-a)^2(x - (x-a))}{x^4} = \underline{\underline{\dfrac{3a(x-a)^2}{x^4}}}$

6) $\underline{\underline{f`(x) = 3x^2 \cdot (bx^3 + cx + d)^{3n} + x^3 \cdot 3n(bx^3 + cx + d)^{3n-1}(3bx^2 + c)}}$

7) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - 1 = \dfrac{1 - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}}$

8) $f`(x) = \dfrac{3(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} - 3x \cdot \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)}{25 - x^2} = \dfrac{3(25 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{3x^2}{(25 - x^2)^{\frac{1}{2}}}}{25 - x^2}$

$= \dfrac{3(25 - x^2) + 3x^2}{(25 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{75}{(25 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \underline{\underline{\dfrac{75}{\sqrt{(25 - x^2)^3}}}}$

Integralrechnung I

1. Allgemeines Integral

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$ Bez. Unbestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$ Bez. Bestimmtes Integral

2. Grundintegral für ganze rationale Funktionen

2.1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad mit\ C \in IR$

2.2. Ausgewählte Sätze zur Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx \ mit\ k \in IR$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \ mit\ a \le b \le c$$

$$\int_a^a f(x)dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

2.3. Partielle Integration nach den Variablen x und y

$$\int (3ax^6 + 7x^5 + 4x^3 - 1)dx = \frac{3}{7}ax^7 + \frac{7}{6}x^6 + x^4 - x + C$$

$$\int (3ax^4y^5 + 5x^2 + ax)dy = \frac{1}{2}ax^4y^6 + 5x^2y + axy + C$$

2.4. Beispiele zur Flächenberechnung

2.4.1. $f(x) = -x^2 + 4x = -x(x-4)$ Nullstellen: $x_{01} = 0$ und $x_{02} = 4$

2.4.1.1. Flächenberechnung oberhalb der Abszisse

$$F = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = -\frac{64}{3} + \frac{96}{3} = \frac{32}{3}$$

2.4.1.2. Flächenberechnung unterhalb der Abszisse

$$F = \int_5^4 (-x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_5^4 = -\frac{64}{3} + 32 - (-\frac{125}{3} + 50) = \frac{7}{3}$$

2.4.2. Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x)

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 6 \quad und \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

Schnittpunkte von f(x) und g(x): $x_{s1} = -3$ und $x_{s2} = 6$

$$F = \int_{-3}^6 (f(x) - g(x))dx = \left[-\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-3}^6 = \frac{81}{4}$$

Integralrechnung II

3. Grundintegral für gebrochene rationale Funktionen

3.1. $\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$

3.2. Beispiele zur Flächenberechnung

$$\int_1^{10} \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{10} = -\frac{1}{200} - (-\frac{1}{2}) = \frac{99}{100}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^{R} = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{2R^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

4. Das Integral von $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x \quad + C$$

$$\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{10} = \ln 10 - \ln 1 = \ln 10 - 0 = \ln 10$$

5. Das Integral von $f(x) = e^x$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

6. Beispielaufgabe zu 3. bis 5.

$$\int_a^b \left(3x^4 + 7ax^2 + \frac{3}{x^7} + \frac{a}{4x^3} - \frac{2}{x} + e^x - a \right) dx = \left[\frac{3}{5}x^5 + \frac{7}{3}ax^3 - \frac{3}{6x^6} - \frac{a}{8x^2} - 2\ln x + e^x - ax \right]_a^b$$

7. Integrale von folgender Form sind in der Regel nicht lösbar: $\int \frac{x+7}{1-x^5} dx$

8. Hinweise zur Integralrechnung:

8.1. Integrieren Sie bei der Flächenberechnung nie über eine Nullstelle hinweg.

8.2. Integrieren Sie bei der Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) nie über die Schnittpunkte dieser Funktionen hinweg.

8.3. Bei der Flächenberechnung zwischen einer Funktion und der Abszisse werden Flächen die oberhalb (unterhalb) der Abszisse liegen berechnet, indem man die rechte (linke) Grenze nach oben und die linke (rechte) Grenze nach unten schreibt.

8.4. Bei der Flächenberechnung zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) subtrahiert man grundsätzlich von der oben liegenden Funktion die unten liegende Funktion und setzt den rechten (linken) Schnittpunkt der Funktionen im Integralzeichen nach oben (unten) unabhängig von der Lage der Fläche im Koordinatensystem.

8.5. Es existiert in der Integralrechnung keine der Kettenregel in der Differentialrechnung analoge Regel.

8.6. Weitere Integrationsregeln:
Partielle Integration und Integration durch Substitution.

Logarithmusfunktionen und Exponentialfunktionen

1. Die Logarithmusfunktion

1.1 Logarithmengesetze

(1) $\log ab = \log a + \log b$
(2) $\log ab^{-1} = \log a - \log b$
(3) $\log a^r = r \cdot \log a$

1.2 Die allgemeine und natürliche Logarithmusfunktion
$f(x) = \log_2(x)$ $g(x) = \log_3(x)$ $h(x) = \lg(x)$ $i(x) = \ln x$

1.3 Die Funktion $F(x) = \ln x$ als Integral der Funktion $f(x) = x^{-1}$.

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x \quad \text{für} \quad 0 \angle x$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad \text{für} \quad x \in \Re \quad \text{mit } x \neq 0$$

1.4. Kurvendiskussion zu den Logarithmusfunktionen
$f(x)= \ln(x^2 +4)$ $g(x) = \ln(x + 4)$ $h(x) = \ln(x^2 - 3x)$ $i(x) = x(\ln x)^{-1}$

2. Die Exponentialfunktion

2.1 Die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $f'(x) = a^x \ln a$

2.2 Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ mit $f'(x) = e^x$

HINWEIS: Nur die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion e^x stimmt mit der Funktion e^x überein. In allen anderen Fällen muss die Kettenregel zur Ableitung verwendet werden.
Es gilt: $e^{\ln a} = a$ und $\ln e^a = a$

2.3 Die Graphen der Funktionen
$f(x) = e^x$ $g(x) = 2e^x$ $h(x) = e^{2x}$ $i(x) = e^{x+2}$ $j(x) = e^{x^2}$ $k(x) = e^{-x^2}$

2.4 Die erste und zweite Ableitung der Funktionen
$f(x) = e^{x^2}$ $g(x) = xe^x$ $h(x) = (x-1)\,e^{-x}$

2.5. Der Zusammenhang der Graphen der Funktionen
$f(x) = x^{-1}$ $g(x) = \ln x$ und $h(x) = e^x$

Kurvendiskussionen von Exponentialfunktionen

Aufgabe 1

Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x) = (2x-1)\, e^x$

a) Diskutieren Sie die Funktion und protokollieren Sie dabei detailliert die Arbeitsschritte.

b) Bestimmen Sie die Wendetangente und ihren Schnittpunkt mit der x-Achse.

c) Die Wendetangente, der Graph der Funktion und die x-Achse schließen eine Fläche ein. Wie groß ist diese Fläche?

d) Ist die Fläche, die von der negativen x-Achse und dem Graphen der Funktion eingeschlossen wird, endlich?

Aufgabe 2

Von einer Bakterienkultur sind zum Beginn des Aufgusses um 8.00 Uhr: 2200 Bakterien vorhanden.

Stündlich wird darauffolgend viermal der Bakterienbestand kontrolliert; nachfolgend das Messprotokoll:

Zeit	8:00 Uhr	9:00 Uhr	10:00 Uhr	11:00 Uhr	12:00 Uhr
Anzahl	2200	3970	7160	12920	23310

a) Begründen Sie mit Hilfe der Wertetabelle, dass sich der Vorgang im mathematischen Modell näherungsweise durch eine exponentielle Wachstumsfunktion beschreiben lässt, und stellen Sie eine den Vorgang beschreibende Funktionsgleichung auf unter Verwendung der Eulerschen Zahl e.

b) Stellen Sie den Zusammenhang grafisch dar.

c) Berechnen Sie die Verdoppelungszeit der Bakterienanzahl.

d) Nach welcher Zeit erwarten Sie, dass der Bakterienbestand auf das 16-fache gewachsen ist, um welche Uhrzeit wird erwartungsgemäß die „Marke" von 100.000 Bakterien erreicht?

e) Erläutern Sie, dass der Begriff: „Wachstumsrate" mathematisch durch die 1.Ableitung beschrieben wird. Bilden Sie die 1.Ableitung und berechnen Sie die Wachstumsrate zum Zeitpunkt 10:00 Uhr.

Aufgabe 3

Betrachtet wird die Funktion f mit:

$$f(x) = (e^x - 1)^2$$

f) Untersuchen Sie die Funktion f auf relative Extrempunkte und Wendepunkte.

g) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$.

h) Skizzieren Sie den Graphen von f.

i) Die Gerade g mit $g(x) = 1$ und der Graph von f umschließen im 1. Quadranten eine Fläche. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes.

j) Die Maßzahl des Flächeninhaltes über dem Intervall $[a; 0]$ zwischen der Geraden g mit $g(x) = 1$ und dem Graphen von f beträgt ½. Ermitteln Sie die Stelle a.

Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen lauten:

1. f(x) = sin x

$D = \Re$ Nullstellen bei $x = n\pi$ Extremwerte bei $x = (n + \frac{1}{2})\pi$

Wendepunkte an den Nullstellen Periode: 2π

2. f(x) = cos x

$D = \Re$ Nullstellen bei $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ Extremwerte bei $x = n\pi$

Wendepunkte an den Nullstellen Periode: 2π

3. f(x) = tan x $= \frac{\sin x}{\cos x}$ ist eine streng monoton wachsende Funktion

$D = \Re \,/\, ((n + \frac{1}{2})\pi)$ Nullstellen bei $x = n\pi$ Pole bei $x = (n + \frac{1}{2})\pi$

4. f(x) = cot x $= \frac{\cos x}{\sin x}$ ist eine streng monoton fallende Funktion

$D = \Re \,/\, (n\pi)$ Nullstellen bei $(n + \frac{1}{2})\pi$ Pole bei $x = n\pi$

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Für die Ableitungen von f(x) =sin x und g(x)=cos x gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= +\sin x \\
f'(x) &= (\sin x)' = +\cos x \\
f''(x) &= (\cos x)' = -\sin x \\
f'''(x) &= (-\sin x)' = -\cos x \\
f''''(x) &= (-\cos x)' = +\sin x \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Quotientenregel werden tan x und cot x abgeleitet:

$$f'(x) = (\tan x)' = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]' = 1 + (\tan x)^2 = (\cos x)^{-2}$$

$$f'(x) = (\cot x)' = \left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]' = -1-(\cot x)^2 = -(\sin x)^{-2}$$

Allgemeine Sinus- Funktion

$f(x) = a \sin b(x+c) + d$

Der Faktor a streckt / staucht den Graphen der Funktion.
Der Faktor b verlängert / verkürzt die Periode des Graphen der Funktion.
Die Konstante c verschiebt den Graphen der Funktion in Richtung der Abszisse.
Die Konstante d verschiebt den Graphen der Funktion in Richtung der Ordinate.

Hinweis: Alle Funktionen der Form
$f(x)= \sin 2x$ $g(x)=\sin x^2$ $h(x)=\sin(x+k)$ $i(x)= (\sin x)^2$ usw.
werden mit Hilfe der Kettenregel abgeleitet.

Formeln zur Differentiation und zur Integration von ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen:

1. Differentiation
von ganzen rationalen Funktionen

1.1. Summenformel $f(x) = x^n$ $f'(x) = n x^{n-1}$

1.2. Produktregel $f(x) = u(x)v(x)$

$$f'(x) = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$$

1.3. Kettenregel $f(x) = f(g(x))$

$$f'(x) = [f(g(x))]' = f'(u)\, g'(x)$$

von gebrochenen rationalen Funktionen

1.4. Quotientenregel $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$f'(x) = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

1.5. Logarithmusfunktion

Natürliche Logarithmusfunktion: $f(x) = \ln x$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

Allgemeine Logarithmusfunktion: $f(x) = \log_a x$ $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

1.6. Exponentialfunktion

Natürliche Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

Allgemeine Exponentialfunktion: $f(x) = a^x$ $f'(x) = a^x \ln a$

2. Integration von
ganzen rationalen Funktionen

2.1. unbestimmtes Integral $F(x) = \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ mit $C \in R$

2.2. bestimmtes Integral $F(x) = \int_a^b x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_a^b = F(b) - F(a)$

gebrochenen rationalen Funktionen

2.3. $F(x) = \int \frac{1}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$ mit $C \in R$

2.4. Exponentialfunktion $F(x) = \int e^x dx$ $F(x) = e^x + C$

2.5. Ableitung der trigonometrischen Funktionen:

$f(x) = \sin x$ $f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\sin x$ $f'''(x) = -\cos x$